不等式多证法：形式简洁与结构简洁

苏　蕊
（重庆市万州区重庆三峡科技大学）
DOI：10.65285/JYLLYJ.V2I6.022

摘　要：同一不等式常有多条证明路径，但证法数量不等于审美价值。通过比较立方和约束不等式、二维柯西—施瓦茨不等式及分式型不等式的证明发现：不同证法可能共享非负平方结构，同一结构可表现为恒等式、判别式或向量关系，特殊恒等式归约到一般原理虽压缩推导却增加学习前提。据此区分形式简洁与结构简洁，并从揭示依据、比较结构、辨析等号条件提出教学启示。本文不涉及课堂实证，结论限于所选命题。
关键词：数学美；不等式证明；一题多证；形式简洁；结构简洁

The Multi-Proof Method for Inequalities: Formal Conciseness and Structural Conciseness

Rui Su
Chongqing Sanxia University of Science and Technology, Wanzhou District, Chongqing

Abstract: A single inequality often has multiple proof paths, yet the number of proofs is not equivalent to aesthetic value. By comparing proofs of cubic sum constrained inequalities, the two-dimensional Cauchy–Schwarz inequality and fractional inequalities, this study finds that different proofs may share a non-negative square structure. The same structure can be expressed as an identity, a discriminant or a vector relation. Although reducing special identities to general principles can shorten derivation, it raises the learning prerequisites. On this basis, this paper distinguishes formal conciseness from structural conciseness and puts forward pedagogical implications from three aspects: revealing theoretical grounds, comparing structures and analysing equality conditions. This study does not include classroom empirical research, and its conclusions are limited to the selected propositions.
Keywords: beauty of mathematics; proofs of inequalities; multiple proofs for a single problem; formal conciseness; structural conciseness

一、问题提出

不等式证明具有显著的方法多样性。同一命题可以通过作差、配方、函数性质或向量关系得到证明。多种证法的并列有助于展示思路，但若分析止于方法名称及运算步骤，就难以解释不同证明何以成立、彼此是否具有共同依据，以及何种意义上的“简洁”值得在教学中强调。徐雪利以一道不等式证明题为例，面向高中生介绍了综合法、换元法、放缩法、比较法与反证法等常用证明方法[1]。该文属教学辅导，而非结构分析研究。由此引出：当同一命题存在多条证明路径时，这些路径之间是否具有可证明的数学联系？多证法的教学价值能否从“数量丰富”转向“结构比较”，是本文关注的核心问题。

数学美研究要求回到具体数学活动：付柳林强调体验与活动相联系[2]，张晓贵主张从对象与主体相互作用理解数学美[3]，于冬梅、黄友初强调审美化教学依托数学知识本身[4]，倪筱妤、徐文彬指出既有研究偏重案例呈现、理论整合不足[5]。据此，证明美的分析须进入证明所使用的数学关系，不能仅由符号长度或推导行数判定。本文把“形式简洁”“结构简洁”作为分析性术语，而非可普遍适用的审美量表。研究回答：一，形式简短与结构清晰如何区分；二，不同证法具有哪些可证明的内在联系；三，这些联系可为高中不等式证明教学提供何种有限而具体的启示。

二、研究材料、方法与分析标准

（一）研究材料与范围

本文选取三个命题作为分析对象：第一，已知 a、b 为正数且 $a^3+b^3=2$，证明 $a+b\leqslant 2$ 及 $ab\leqslant 1$；第二，二维柯西—施瓦茨不等式；第三，具有正分母的分式型不等式。第一题取自徐雪利的教学案例[1]，本文对该题的证明结构进行分析，不涉及对原文证法呈现方式的评价。后两题为经典不等式的标准形式。选择标准是：命题条件明确，至少存在两种具有可辨识差异的证明路径，且能够用高中代数、二次函数或平面向量知识解释其核心依据。

（二）方法与概念界定

采用证明重构与结构比较：核对变量范围、推导等价性与等号条件；剥离辅助符号，寻找关键原理；比较依赖关系。“形式简洁”指书写长度、运算次数和步骤数量的凝练，可用符号数量、推导行数描述，但不构成对数学内容的评价。“结构简洁”指关键数学关系的依赖层级：一级结构为不等式成立的直接来源（平方项、判别式、向量夹角约束）；二级结构为从一级结构到结论的推导链；三

级结构为所调用的外部定理。判定标准是：一级结构是否直接可见，二级链是否完整，三级依赖是否必要且可追溯。二者不等同也不对立，均以正确性为前提。本文区分三种关系：结构等价，即不同写法可归结为同一非负性事实；表征转换，即相同关系通过代数、函数或几何语言表达；原理归约，即特殊命题可以由一般的结果推出。三者并非互斥分类，而是解释证明联系的不同层面。在后续分析中，同一案例可能同时涉及多种关系。

三、典型不等式多证法的结构比较

（一）立方和约束不等式：多种写法背后的同一非负结构

设 a>0、b>0，$a^3+b^3=2$。证明 $a+b \leqslant 2$、$ab \leqslant 1$。徐雪利的研究给出多种证法[1]；本文重点考察其中的共同结构，而非重复罗列全部方法。

证法一（恒等变形）

$4(a^3+b^3)-(a+b)^3=3(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0$。

因此 $(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)=8$。由于 a+b>0，得 $a+b \leqslant 2$。又由 $(a-b)^2 \geqslant 0$ 可知 $4ab \leqslant (a+b)^2 \leqslant 4$，故 $ab \leqslant 1$。两处等号同时成立当且仅当 a=b=1。

证法二（均值关系）。由二元幂平均不等式

$$\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{a+b}{2}$$

代入 $a^3+b^3=2$ 即得 $a+b \leqslant 2$，再由 $ab \leqslant [(a+b)/2]^2$ 得 $ab \leqslant 1$。若以幂平均不等式为已知定理，证法二较短；但它省略了该定理在二元三次情形中的证明理由。证法一则直接给出差值因子 $3(a+b)(a-b)^2$，显示差距为何非负[1]。

两种证法并非数学依据完全独立：在此特定情形下，幂平均不等式的核心结论正可由证法一的非负平方结构证明。因此，称证法二“更美”不能仅依据字数；它的优势是调用一般定理的效率，证法一的优势是展示特殊命题的内部结构。此处所谓结构简洁，表现为一个非负因子同时解释结论、差距和等号条件。

（二）二维柯西—施瓦茨不等式：代数、函数与几何表征

对任意实数 a、b、c、d，有

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$

证法一（恒等式）。直接展开并整理：

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2 \geqslant 0$

等号成立当且仅当 ad=bc。该证明将四元不等式压缩为单个平方项，其关键并非展开计算本身，而是发现交叉项恰好构成完全平方。

证法二（二次函数）。设向量 u=(a,b)、v=(c,d)。当 $c^2+d^2>0$ 时，对任意实数 t，

$f(t)=(a-tc)^2+(b-td)^2 \geqslant 0$

展开得 $f(t)=(c^2+d^2)t^2-2(ac+bd)t+(a^2+b^2)$。由于该二次函数恒非负，其判别式不大于零，故所证不等式成立。当 c=d=0 时原式两边均为零，需单独处理。等号成立当且仅当存在实数 t 使 u=tv；若 v=0，对任意 u 等号都成立。

证法三（平面向量）。需要补充说明的是，向量证明的逻辑有效性依赖于一个教材知识序列的前提。在人教 A 版（2019）必修第二册中，向量数量积（6.2.4 节）先于余弦定理（6.4.3 节）出现。如果学生在学习柯西不等式之前已经掌握了余弦定理，向量证明不存在逻辑问题。但如果教学顺序是柯西不等式先于余弦定理出现，则向量证明中的步骤“$u \cdot v=|u||v|\cos\theta$”在严格意义上引入了后续章节的结论。因此，向量证明的教学适用条件需要根据实际教材序列来确定。本文不主张向量证明在逻辑上无效，但主张在教学分析中应明确这一序列依赖。若 u、v 均非零，则 $u \cdot v=|u||v|\cos\theta$，而 $|\cos\theta| \leqslant 1$，因而 $(u \cdot v)^2 \leqslant |u|^2|v|^2$。若其中一向量为零，此法的有效性依赖于数量积的几何定义 $u \cdot v=|u||v|\cos\theta$ 与余弦的取值范围 $|\cos\theta| \leqslant 1$。若其中一向量为零，结论显然。

三种证明分别强调平方非负、二次函数全局非负及向量夹角约束。其共同点是描述两组数之间的线性相关程度：当 ad−bc=0 时，两向量线性相关，且差值为零。由此可见，表征转换并非只是符号改写；不同表征提供了对等号条件、变量关系及证明动机的不同解释。

（三）分式型不等式：特殊恒等式与一般原理的归约

设 a、b 为任意实数，x>0、y>0，证明

$a^2/x+b^2/y \geqslant (a+b)^2/(x+y)$

证法一（直接作差）。通分并整理可得

$a^2/x+b^2/y-(a+b)^2/(x+y)=(ay-bx)^2/[xy(x+y)] \geqslant 0$

故结论成立，等号成立当且仅当 ay=bx。此式同时给出不等式的成立原因与差距的精确表达。

证法二（柯西归约）。令四个实数分别为 $\frac{a}{\sqrt{x}}$，$\frac{b}{\sqrt{y}}$，$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$，应用二维柯西—施瓦茨不等式：

$(a^2/x+b^2/y)(x+y) \geqslant (a+b)^2$

由于 x+y>0，立即得到原不等式。两种证法表面上分别是分式通分与一般定理应用，实质上证法一的平方项恰是证法二中柯西不等式差值的具体展开。

其等号条件亦一致。

进一步，若 $x_1,\cdots,x_n$ 均为正数、$a_1,\cdots,a_n$ 为实数，则由 n 维柯西不等式得到

$\Sigma(ai^2/xi) \geqslant (\Sigma ai)^2/\Sigma xi$

一般原理的价值在于解释一类命题的共同形式；但一般性更强不必然对初学者更清晰，直接作差可能更易显露等号条件与结构来源。

四、从形式简洁到结构简洁的分析结论

（一）形式简洁是表达特征，不是独立的数学解释

三个案例表明，短证明可能借一般定理压缩书写，解释力强的证明则显露关键非负结构、等号条件及表征联系。

（二）结构简洁表现为关键关系的可见性

第一题的 $(a-b)^2$、第二题的 $(ad-bc)^2$ 和第三题的 $(ay-bx)^2$ 均使非负性直接可见，并可同时追踪等号条件。这些恒

等式并非越短越好，而是因为它们把结论、差距和成立条件组织在同一关系中，具有较强解释力。由此，结构简洁的判断应着重考察关键关系是否明确、证明前提是否透明、推理是否完整。

（三）结构统一需要论证，不能凭方法名称认定

作差法、判别式法、向量法和柯西法在教学材料中常被列为不同技巧，但方法名称并不能确定其逻辑独立性。第二题中，二次函数判别式与平方恒等式均反映两向量线性相关的边界；第三题中，直接作差是一般柯西差值的特例。只有写出这种可检验的数学联系，“多证”才转化为“结构比较”。相反，对于确实依赖不同定理的证明，应保留差异，不宜为了追求统一而作牵强归并。

五、基于证明结构比较的教学启示

（一）以关键恒等式组织证法比较

讲评一题多证时，可先呈现两条外观不同的证明，再要求解释各自使用的非负性事实，最后追问它们是否可由同一恒等式导出。例如第一题可以围绕 $3(a+b)(a-b)^2$ 讨论证明中的核心结构，而不是停留于“综合法比放缩法更简洁”的主观评价。以上建议的性质需要明确界定。它们是从三个不等式案例的结构分析中提出的教学假设，而非经过课堂实证检验的教学方案。数学结构感知的实证研究表明，学生对代数结构的感知存在显著个体差异。教师将数学结构转化为教学结构的过程中，学生的认知准备程度、先前知识水平和符号操作经验均可能构成调节变量。因此，这些建议的适用范围和有效性需要后续研究通过课堂观察或准实验设计加以检验。

（二）以等号条件检验证明理解

等号条件是识别结构的重要线索。第二题的 $ad=bc$ 与向量共线相联系，第三题的 $ay=bx$ 与柯西等号条件一致。教学中可以将“何时取等”作为比较证法的共同问题，帮助检查证明是否真正揭示了差距来源。

（三）在直接证明与一般原理之间建立往返联系

对于能够作差得到平方项的命题，可先展示具体恒等式，再指出其对应的一般不等式；在学生掌握一般原理后，再返回解释具体命题。这种由特殊到一般、再由一般回到特殊的组织方式，能够避免仅把一般定理作为缩短答案的工具。于冬梅、黄友初强调审美教学须以数学知识为依托[4]，本文的建议正是将审美讨论落实为对证明依据的辨析，而非额外附加形容性评价。

结语：

通过三个不等式案例的数学比较可以看到，证明的形式简洁与结构简洁既有关联，也不能混同。较短的证明可能借助一般定理压缩书写；较能解释命题的证明则往往显露关键非负性结构、等号条件及不同表征间的联系。多证法研究的有效推进，不在于尽可能增加方法种类，而在于说明这些方法的数学关系，并辨认其各自的解释优势。

本文的证据限于三类典型不等式及其证明，不构成对高中不等式整体的统计概括；“形式简洁”“结构简洁”亦为本文的分析性术语，尚未形成可普遍适用的审美量表。文章没有实施课堂观察、问卷或实验，因而不能声称相关建议已提高学生的数学审美能力。未来研究可以扩大命题类型，并在明确研究伦理与教学条件后考察不同证明呈现方式的学习效果。

注释：

① 文中所有数学证明均按命题条件独立核验；经典不等式的使用不等于对其原创性的主张。

参考文献：

[1] 徐雪利 . 不等式的一题多证 [J]. 中学生数理化 (高二版),2008(Z1):23-24.

[2] 付柳林 . 数学美的再认识及其审美教学策略 [D]. 广西师范大学 ,2004.

[3] 张晓贵 . 数学美的综合认识：一条理解数学美的新路径 [J]. 数学教育学报 ,2023,32(3):78-82.

[4] 于冬梅 , 黄友初 . 数学审美化教学的内涵特征与实践路径 [J]. 数学教育学报 ,2025,34(1):85-91.

[5] 倪筱妤 , 徐文彬 . 对中小学数学教育中数学美研究的回顾与思考 [J]. 数学教育学报 ,2026,35(4):81-87.

作者简介：苏蕊（2004 年 -）、女、汉族、贵州省贵阳市人、硕士研究生、重庆三峡科技大学数学与统计学院学科教学（数学）专业、研究方向：数学教育研究。